

EVOLVENS SZÁRMAZTATÁSA KÜLÖNBÖZŐ MÓDSZEREKKEL

CONSTRUCTION OF THE INVOLUTE BY DIFFERENT METHODS

Dr. Bihari Zoltán*, Szabó Sándor Imre**

ABSTRACT

Gears have long been considered one of the fundamental components in mechanical engineering. In the past, there was generally no need for precise tooth geometry in everyday practice, as the manufacturing technologies used did not require it. In addition, mechanical drawing rules also contain provisions for the simplified representation of gears.

However, in today's world, where machining is carried out using CAD/CAM systems and additive manufacturing technologies are becoming increasingly prevalent, the precise design of tooth profiles is becoming increasingly necessary.

1. BEVEZETÉS

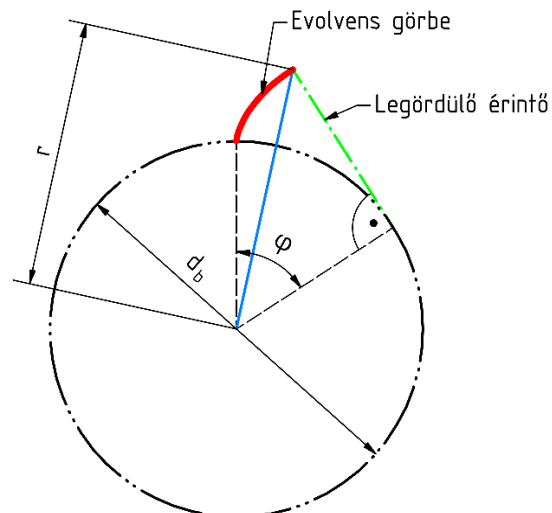
A fogaskerek hosszú idő óta az egyik alapvető építőelemnek tekinthetők a gépiparban. A korábbi évtizedek során a mindennapi gyakorlatban általában nem volt szükség a pontos foggeometria kiszámítására, mivel az alkalmazott gyártástechnológiák ezt nem tették szükségessé. Ezenkívül a géprajzi szabályok is megfogalmazzák a fogaskerek egyszerűsített ábrázolására vonatkozó megállapításokat [3].

Azonban a mai kor szellemében, amikor már a forgácsolás CAD/CAM rendszerek felhasználásával történik, egyre inkább teret nyernek az additív gyártástechnológiák. A végeselemes szimulációk végzéséhez már egyre inkább szükségessé válik a pontos foggörbe kiszámítása.

A fogaskerek fogprofiljának elkészítése több különböző matematikai görbe felhasználásával lehetséges. Ezek közül a gyakorlatban a körevolvens alkalmazása terjedt el széles körben [1], [2].

2. AZ EVOLVENS SZÁRMAZTATÁSA, MATEMATIKAI LEÍRÁSA

A körevolvens görbe definíciója szerint egy olyan görbe, amit egy olyan egyenes pontjai írnak le, amely egy körön csúszás nélkül legördül [1], ahogy azt az 1. ábra mutatja.



1. ábra Az evolvens származtatása

Az 1. ábrán szereplő d_b átmérőjű kör a fogaskerek esetén az alapkör elnevezést kapta. Ez nem része a valós geometriának, a fogprofil evolvens görbe származtatásához szükséges, átmérőjének kiszámítása a következőképpen lehetséges [4]:

$$d_b = m \cdot z \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

ahol:

- m : a fogaskerék modulja
- z : a fogaskerék fogszáma
- α : a kapcsolószög

Ez azt a kört jelenti, amin le fog gördülni az érintő egyenes, amelynek egy pontja létrehozza az evolvenst. A továbbiakban önkényesen felvett adatok alapján legyen adott egy elemi fogazat. Esetünkben a modul legyen 5 mm, a fogsám 25, a kapcsolószög pedig 20° lesz. Ebben a tanulmányban az ezekből az adatokból generált fogaskerekre vonatkozóan fogjuk a geometriai vizsgálatokat elvégezni. Ha ezeket az értékeket behelyettesítjük az 1. összefüggésbe, az alapkör átmérője:

$$d_b \approx 117,462 \text{ mm} \quad (2)$$

* egyetemi docens, Miskolci Egyetem Gép- és Terméktervezési Intézet

** PhD hallgató, Miskolci Egyetem Gép- és Terméktervezési Intézet

Az 1. ábrán jelölt „r”, az alapkör középpontját az evolvens görbe aktuális pontjával összekötő vezérsugár [5]. A „ φ ” az a szög, ami leírja a legördülő érintőre merőleges sugár helyzetét.

Az evolvens görbe matematikai leírása Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben a következő egyenletrendszer formájában adható meg a φ függvényében. [5]:

$$\begin{aligned}x &= \frac{d_b}{2} \cdot (\sin \varphi - \hat{\varphi} \cdot \cos \varphi) \\y &= \frac{d_b}{2} \cdot (\cos \varphi + \hat{\varphi} \cdot \sin \varphi)\end{aligned}\quad (3)$$

A $\hat{\varphi}$ az összefüggésekben a φ radiánban vett értéke.

A későbbiek során szükséges lesz az „r” vezérsugár ismerete a φ függvényében, ehhez felhasználható az alábbi összefüggés [5]:

$$\hat{\varphi} = \sqrt{\left(\frac{r}{d_b/2}\right)^2 - 1} \quad (4)$$

Majd a 4. összefüggést rendezve r-re:

$$r = \pm \frac{d_b}{2} \sqrt{\hat{\varphi} + 1} \rightarrow \frac{d_b}{2} \sqrt{\hat{\varphi} + 1} \quad (5)$$

A továbbiakban a geometria pontosságára vonatkozó geometriai elemzést a korábban önkényesen felvett adatokkal fogjuk elvégezni. Célunk annak megállapítása, hogy a CAD rendszerek milyen pontossággal közelítik a valós fogprofil evolvens görbét. Amennyiben a közelítés elfogadhatóan pontos, a modellt a későbbiek során alkalmasnak tekinthető más vizsgálatok elvégzésére is.

3. EVOLVENS ELŐÁLLÍTÁSA CAD SZOFTVEREKSEL

A CAD szoftverekben jellemzően nincs közvetlen utasítás evolvens görbe létrehozására. Régebben az volt az elfogadott eljárás, hogy pontokra illesztett spline görbékkel közelítették az evolvenst és más hasonló összetett görbéket. Viszont ez a módszer hordozott magában potenciális hibákat, mivel csak egy közelítőgörbe volt, és sok esetben a spline pontos típusa sem volt ismert. A legtöbb CAD szoftver az interpoláló B-spline görbét preferálta [6], [7].

Az ezen az úton létrehozott görbékkel kapcsolatban további problémát jelentett, hogy nem lehetett így parametrikus-asszociatív görbéket létrehozni. Minden esetleges módosítás miatt előlről kellett kezdeni a görbék létrehozását, ami nagyon időigényes volt [8], [9].

A mai modern rendszerekben azonban már van lehetőség egyenletekkel definiálni a görbéket. A korábban ismertetett egyenletek (3.) felhasználásával egyszerűen képezhető evolvens.

A következőkben az Autodesk Inventor kereskedelmi CAD rendszer segítségével bemutatásra kerül egy körevolvens létrehozása. (Megj: Más CAD programrendszerben is található matematikai formulával megadható görbe, ez nem csak az Inventor privilégiuma.)

4. EVOLVENS GÖRBE LÉTREHOZÁSA AUTODESK INVENTOR RENDSZERREL

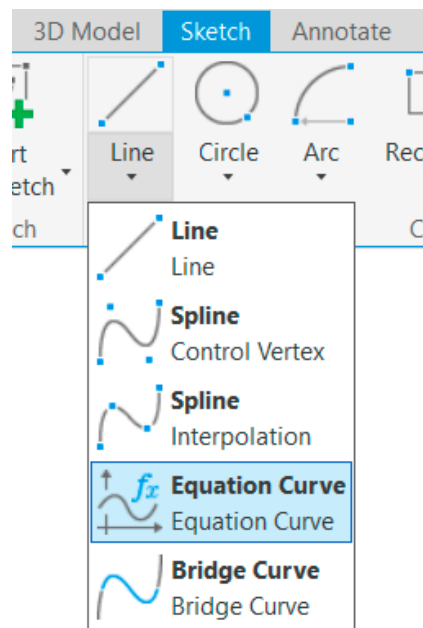
Egy új Part fájl létrehozása után meg kell nyitni a paramétertáblát, és beírni a szükséges értékeket, figyelve a megfelelő mértékegységekre [2. ábra].

Parameter Name	Consumed	Unit/Type	Equation	Nominal Value
Model Parameters				
User Parameters				
module	D_b	mm	5 mm	5,000000
alpha	D_b	deg	20 deg	20,000000
z	D_b	ul	25 ul	25,000000
D_b		mm	module * z * cos(alpha)	117,461578

2. ábra A paramétertábla az evolvens létrehozásához

Ezzel az Inventor ki tudja számolni az alapkört a korábbiakban ismertetett módon, amely az evolvenshez lesz szükséges. Javasolt létrehozni egy vázlatot a *Start 2D Sketch* paranccsal. Majd a sketchben meg kell rajzolni egy kört, aminek az átmérője a „d_b” lesz.

Ezt követően a *Sketch* fülön található *EquationCurve* parancsra lesz szükség, ezzel hozható létre a görbe matematikai képlet betáplálásával. A parancs elérését a 3. ábra mutatja.

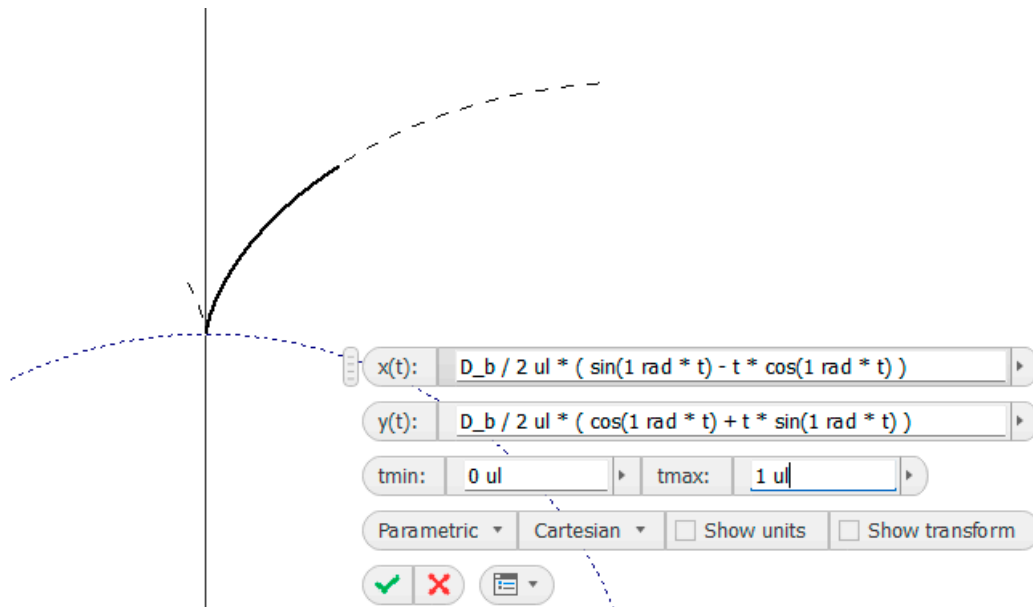


3. ábra Az EquationCurve parancs ikonja

A betáplált értékek és a görbe előnézete látható a 4. ábrán. Fontos megjegyezni, hogy amit a korábban leírt képleteknél „ φ ” változóval jelöltünk, az a szoftverben „t” –vel adtuk meg. (Megjegyzés: Az Inventor program nem támogatja a görög karaktereket.) Ezt a szöveget radiánban kell érteni, és úgy kell módosítani a képleteket, hogy

radiánnal számoljon, mert az alapértelmezett mértékegység a szoftverben a fok. Esetünkben az evolvens 0 és 1 radián között került generálásra.

Bezárva a párbeszédpanelt létrejön az evolvens, ami a paramétertáblában lévő értékek módosításával azonnal változik, asszociatív módon.



4. ábra A betáplált értékek és a görbe előnézete

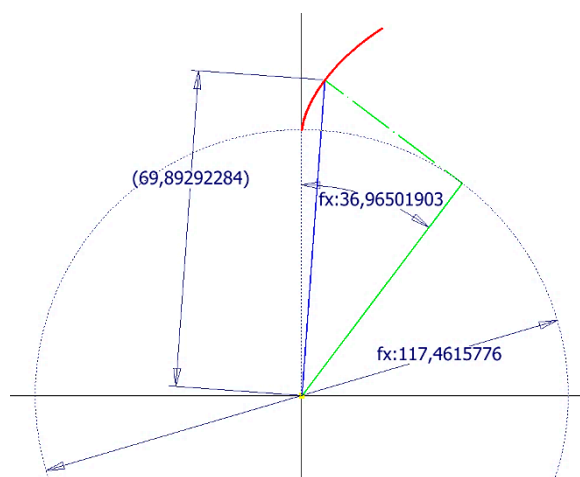
5. AZ EVOLVENS GÖRBE PONTOSSÁGÁNAK ELLENŐRZÉSE

A cél a lehető legpontosabb evolvens létrehozása, mivel a későbbiekben 3D nyomtatott fogaskerek geometriai vizsgálatát szeretnénk elvégezni. Fontos szempont lesz az, hogy a fogaskerek geometriai pontosságát számottevően ne befolyásolja a CAD modell. Tehát ez szükségessé teszi a szoftverrel előállított evolvens pontosságának geometriai ellenőrzését, illetve meghatározását.

A vizsgálat módszere egy ideális elméleti evolvenssel történő összehasonlítás lesz. Ehhez szükség lesz evolvens pontokat felvenni. Esetünkben ez összesen 32, egymástól egyenlő távolságra felvett értéket jelentett a 0 és 1 radián közötti intervallumon. Ezeket a radiánban vett szögeértékeket be kell helyettesíteni az 5. képletbe a „ φ ” helyére, és így megkapjuk minden szöghöz a hozzá tartozó vezérsugar hosszát. Ha a „ φ ” szélső helyzetét tekintjük, azaz éppen zérust helyettesítünk be, akkor az alapkör $d_b/2$ sugarat fogjuk megkapni, ami triviális megoldás. Ezen az értéken felül további 31 pont került meghatározásra a tartományon.

A vizsgálat elvégzéséhez az Inventorban az alábbi 5. ábra szerinti vázlatban mértük meg az egyes „ φ ” szögekhez tartozó vezérsugar hosszát. A folyamat során nagy pontossággal, 8 tizedesjeggyel vettük ki az adatokat a szoftverből.

A kiszámított elméleti evolvens pontokhoz tartozó vezérsugarat (r_{th}) és a CAD szoftverrel egyenlettel előállított görbe mérés által meghatározott vezérsugarait (r_{eq}) az 1. táblázat mutatja. A táblázat összesíti az értékek közötti eltéréseket, ami a CAD-ben előállított görbe hibájának tekinthető.



5. ábra Az evolvens mérés menete

Bizonyos CAD rendszerekben megtalálható egy beépülő alkalmazás, amely mérnöki számításokat követően képes az adott méretezett gépelemeket 3D formában automatikusan megjeleníteni. Ennek a modulnak a fantázianeve például a Solid Edge tervező

rendszerben az ún. *Engineering Handbook*. Ezzel a modullal tervezhető többek között tengely, csigacsigakerék kapcsolat, kúpkérékpár vagy homlokkerekes hajtás. Utóbbi esetben generáltuk a korábbi paraméterekkel a fogaskerek 3D modelljét. Az így létrejött fogalak evolvens görbáját is bevontuk a vizsgálatok közé. Az elemzés célja szintén a fogprofil

geometriai pontosságának ellenőrzése volt. Az 1. táblázatban ezeket az eredményeket is megjelenítettük (r_{3D}). Jól látható, hogy az elméleti úton számított vezérsugarhoz képest lényegesen nagyobb eltérések tapasztalhatóak.

1. táblázat Az elméleti és az előállított evolvens pontok összehasonlítása

Lépés	φ [rad]	Elméleti vezérsugár	Engineering Handbook esetén		Egyenlettel előállított görbe esetén	
		r_{th} [mm]	r_{3D} [mm]	$r_{th} - r_{3D}$ [mm]	r_{eq} [mm]	$r_{th} - r_{eq}$ [mm]
0	0/31	58,73078880	58,7307888	0,00000000	58,73078880	0,00000000
1	1/31	58,76133798	58,7613168	0,00002118	58,76133798	0,00000000
2	2/31	58,85289036	58,8528793	0,00001106	58,85289036	0,00000000
3	3/31	59,00516200	59,0053822	-0,00022020	59,00516200	0,00000000
4	4/31	59,21768450	59,2182163	-0,00053180	59,21768450	0,00000000
5	5/31	59,48981213	59,4898010	0,00001113	59,48981213	0,00000000
6	6/31	59,82073146	59,8188161	0,00191536	59,82073146	0,00000000
7	7/31	60,20947313	60,2047381	0,00473503	60,20947312	0,00000001
8	8/31	60,65492536	60,6477384	0,00718696	60,65492536	0,00000000
9	9/31	61,15584897	61,1470777	0,00877127	61,15584897	0,00000000
10	10/31	61,71089313	61,7012369	0,00965623	61,71089313	0,00000000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Terjedelmi korlátok miatt ebben a tanulmányban az elvégzett mérések táblázatának csak egy részlete látható, a 10-es számú mérési ponttal bezárólag. Esetünkben ez elégséges is, hiszen ezen felül már az evolvens elhagyja a fejkört, így ott a fogalak geometriája invariáns.

6. ÖSSZEGZÉS

Az eredmények egyértelműen mutatják, hogy az egyenlettel előállított evolvens görbe esetén a hiba több nagyságrenddel kisebb, mint a Solid Edge *Engineering Handbook* moduljában készült 3D modell esetén. Az egyenlettel leképezett evolvens 10^{-11} m nagyságrendig pontosnak tekinthető, ami a kívánt jövőbeli alkalmazást figyelembe véve maximálisan elfogadhatónak mondható. Az *Engineering Handbook* modult az additív prototípusgyártás esetén, annak pontatlansága miatt nem javasolt használni.

7. IRODALOM

- [1] DR. VÖRÖS I.: *Gépelemek III. Fogaskerekek*, 4. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.
- [2] PATTANTYÚS Á. G.: *Gépész- és Villamosmérnökök Kézikönyve 3. kötet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1961.
- [3] TÓTH L. – ZAHOLA T.: *Géprajz*, Főiskolai kiadó, Dunaújváros, 2005.
- [4] DIÓSZEGI GY.: *Gépszerkezetek Példatár*, 3. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1996.
- [5] PATTANTYÚS Á. G.: *Gépész- és Villamosmérnökök Kézikönyve 1. kötet*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1959.
- [6] KORMÁNYOS A.: *Interpoláció és extrapoláció polinommal*, ELTE Fizikai Intézet, 2018.
- [7] BOZSIK J.: *Spline interpoláció*, ELTE Informatikai Kar, 2009.
- [8] J. DUHOVNIK – I. DEMŠAR – P. DREŠAR: *Space Modeling with Solid Works and NX*, Springer International Publishing, Switzerland, 2015.
- [9] I. STROUD – H. NAGY: *Solid Modelling and CAD Systems*, Springer-Verlag, London, Limited, 2011.