

KRITIKUS SÍK MEGHATÁROZÁSÁNAK MÓDSZERTANA

METHODOLOGY OF CRITICAL PLANE DETERMINATION

Döbrentei Sándor*, Dr. Zwierczyk Péter Tamás**

ABSTRACT

Fatigue analysis is among the most challenging tasks in engineering practice. Not only because of the statistical nature of fatigue experiments, but the numerous formulas available for fatigue parameter calculation, which allows the engineers to compare the actual stress and strain state of the parts to the results of fatigue experiments. The situation becomes even more complicated, if one is interested in the orientation of the critical plane, on which the fatigue crack propagation is anticipated. In this work a possible methodology of critical plane is introduced.

1. BEVEZETÉS

A kifáradásra való méretezés és ellenőrzés a mérnöki gyakorlat fontos eleme, mert a gépelemek jelentős része ciklikus igénybevételnek van kitéve. Mióta a jelenséget a 19. században felismerték, a fáradási elméletek nagyon sokat fejlődtek, de a többtengelyű, nem arányos terhelés esetén bekövetkező tönkremenetel meghatározása napjainkban is aktívan kutatott terület. Ennek oka, hogy nem arányos terhelés esetén mind a feszültségi, mind az alakváltozási főirányok változnak egy terhelési ciklus során, így a repedés keletkezés és terjedés szempontjából veszélyes sík meghatározása is bonyolultabbá válik. Ismert, hogy a repedés mikroszinten nyírás hatására keletkezik, mert a kristályszerkezet csúszósíkjai nyírás hatására mozdulnak el [1]. Ebből kifolyólag feltételezhető, hogy azok a síkok lesznek repedés keletkezés és ezzel egyidejűleg kifáradás szempontjából veszélyesek, amelyeken a nyírófeszültség és/vagy a nyíró alakváltozás a legnagyobb értéket veszi fel. Bár a repedés keletkezés mikroszinten történik, ahol az anyag a kristálysíkokat és a szemcsék méretét tekintve erősen inhomogén és anizotróp, a mérnöki gyakorlatban a feszültség- és alakváltozási állapotot makroszinten ismerjük és homogén, általában izotróp anyagot tételezünk fel. Tekintve azonban, hogy acélok esetén a szemcseméret μm -es nagyságrendbe esik [2], míg mechanikai oldalról a vizsgálható legkisebb térfogat a mm^3 -es tartományba, így a makroszinten vizsgált sík orientációjával nagyszámú azonos vagy közel megegyező orientációjú csúszósíkot találunk, amelyekben a csúszás nyírás hatására létrejön. A repedés terjedése szempontjából az esetek többségében azonban a normál-feszültség válik meghatározóvá, mivel a már

makroszintű, a szemcseméret többszörösét meghaladó méretű repedést az igénybevétel repedéssíkra merőleges komponense fogja „nyitni”.

Az első kritikus sík meghatározásán alapuló fáradási modellt Findley publikálta, és munkájában ő is a nyírás hatását tartotta fontosnak [3]. Azóta több kutató is publikált különböző elven alapuló modelleket, amelyek három fő kategóriába sorolhatók: feszültségi modellek, alakváltozási modellek és energiaalapú modellek, amelyek kombinálják a feszültség és alakváltozás hatását. A feszültségi modellek általában egytengelyű igénybevétel és nagyciklusú fáradás esetén mutatnak jó egyezést a kísérleti eredményekkel. Az alakváltozás alapú modellek szintén főleg egytengelyű igénybevétel és kisciklusú fáradás esetén használatosak, míg az energia alapú modelleket összetett, nem arányos igénybevétel esetén alkalmazzák kis- és nagyciklusú fáradás esetén egyaránt. Az eddig publikált modellek jelentős része a témát áttekintő [4] és [5] munkákban megtalálható. Ebben a munkában a továbbiakban az általános esetben jobban alkalmazható energia alapú modellekkel fogunk foglalkozni, de minden megállapítás érvényes a feszültség és alakváltozás alapú modellekre egyaránt.

A kritikus sík modellek közös tulajdonsága, hogy a vizsgált anyagi pontban meghatározott feszültségi és alakváltozási mátrix alapján kiszámítjuk egy adott orientációjú síkban ébredő normális és a síkba eső komponens és ezekből az értékekből számítjuk az alkalmazott elméletnek megfelelően az adott síkra érvényes fáradási paramétert (FP). Ezt a vizsgálatot az orientációt diszkrét értékekben változtatva több síkra is elvégezzük úgy, hogy lefedjük lehetséges orientációk teljes halmazát, majd a legmagasabb paraméter értékkel jellemzett síkot tekintjük kritikusnak. A továbbiakban feltételezzük, hogy ez a sík, vagy az anyagi inhomogenitásokat és a főirányok forgását figyelembe véve egy közel azonos orientációjú sík fog helyet adni a tönkremenetelt okozó repedésnek, a kapott paraméter értékét pedig felhasználjuk az élettartam meghatározására, összehasonlítva azt egy kísérletileg megállapított élettartam görbével. Mivel az ismertetett módszer számítási igénye jelentős és a repedés keletkezését és terjedését sok, a számításokban figyelembe nem vehető tényező (anyaghiba, szennyeződés stb.) befolyásolja, így ebben a cikkben egy, a gyakorlatban is alkalmazható módszer kerül bemutatásra.

* PhD hallgató, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gép- és Terméktervezés Tanszék, e-mail: dobrentei.sandor@gt3.bme.hu

** Egyetemi adjunktus, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gép- és Terméktervezés Tanszék, e-mail: z.peter@gt3.bme.hu

2. A FÁRADÁSI PARAMÉTER MEGHATÁROZÁSA

A módszer ismertetéséhez a Jiang és Sehitoglu által javasolt fáradási paraméter került felhasználásra, melynek alakja a következő [6]:

$$FP = \frac{\Delta \varepsilon}{2} \sigma_{max} + J \cdot \Delta \gamma \cdot \Delta \tau, \quad (1)$$

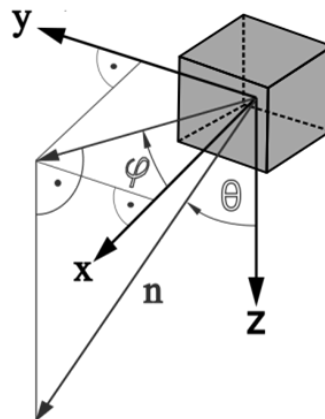
ahol $\Delta \varepsilon$ a vizsgált síkon ébredő normál alakváltozás tartomány, σ_{max} a maximális normál feszültség, J a nyírás hatását figyelembe vevő tényező, értéke általában 0,18 és 0,25 között változik, $\Delta \gamma$ és $\Delta \tau$ rendre a nyíró alakváltozás és feszültség tartomány. A paraméter meghatározásához ismerni kell a vizsgált pontban az alakváltozás és feszültség történetet egy teljes terhelési ciklus esetére. Ezt végelem módszer alkalmazása esetén az algoritmus az elem integrálási pontjaiban határozza meg, innen számítható interpolációval és átlagolással az elem középpontjára vagy a csomópontokra a felhasználó igényei szerint. Megjegyzendő, hogy feszültség és alakváltozás esetén a pontosság rendje megegyezik az elmozdulásmező pontosságával, amennyiben az interpolációs polinom fokszámával megegyező rendű Gauss pontokban számítjuk [7]. Ez azt jelenti, hogy amennyiben lineáris sík elemet használunk, ahol a merevségi mátrix pontos integrálásához 2x2-es Gauss kvadraturát kell alkalmaznunk, a származtatott mennyiségek pontossága az egy renddel kisebb Gauss pontban, vagyis az elem közepén lesz pontosabb. Szintén fontos megemlíteni, hogy amennyiben kifáradásra ellenőrzünk, kiemelten fontos az eredményeket illetően konvergencia vizsgálatot végezni, mert kis változás a feszültségekben nagy eltérést képes okozni a várható élettartamot illetően az élettartam görbe exponenciális jellegéből adódóan. Miután a feszültség és alakváltozás történetet kellő pontossággal meghatároztuk a vizsgált pontban, kiszámítjuk az (1)-es összefüggéssel definiált paraméter értékét diszkrét orientációjú síkokon. A vizsgált síkot a normálvektorával definiáljuk, amely a következő alakban írható fel:

$$\underline{n} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (2)$$

ahol $\theta \in [0, \pi/2]$ y tengely menti forgatást valósít meg, míg $\varphi \in [0, 2\pi]$ z tengely menti forgatást az 1. ábrának megfelelően. A szögtartományokból látható, hogy csak a pozitív z irányú térfelet fedi le a vizsgálat, mivel a negatív térfélen ugyanazokat a síkokat kapjuk, csak ellentétes orientációjú normálvektorral. A vizsgálandó orientáció kiválasztását követően az (1)-es összefüggésben szereplő mennyiségek közül először meghatározzuk az adott síkon ébredő maximális normál feszültséget:

$$\sigma_{max} = \max \left[\left(\underline{\sigma}(t_i) \cdot \underline{n} \right) \cdot \underline{n} \right], \quad (3)$$

ahol $\underline{\sigma}(t_i)$ a feszültség tenzor az i -edik időpillanatban (a használt összefüggésekben az aláhúzás nélküli, vékonyan szedett mennyiségek skalár értékűek, egy aláhúzással jelöljük a vektor és két aláhúzással a tenzor mennyiségeket).



1. ábra. Sík normálisának definíciója.

Az (1)-es összefüggésben szereplő további mennyiségeket az alábbi algoritmus segítségével határozzuk meg:

$$\underline{t}_{\sigma}(t_i) = \underline{\sigma}(t_i) \cdot \underline{n}, \quad (4a)$$

$$\underline{t}_{\varepsilon}(t_i) = \underline{\varepsilon}(t_i) \cdot \underline{n}, \quad (4b)$$

$$\sigma(t_i) = \underline{t}_{\sigma}(t_i) \cdot \underline{n}, \quad (4c)$$

$$\varepsilon(t_i) = \underline{t}_{\varepsilon}(t_i) \cdot \underline{n}, \quad (4d)$$

$$\underline{\sigma}(t_i) = \sigma(t_i) \cdot \underline{n}, \quad (4e)$$

$$\underline{\varepsilon}(t_i) = \varepsilon(t_i) \cdot \underline{n}, \quad (4f)$$

$$\underline{\tau}(t_i) = \underline{t}_{\sigma}(t_i) - \underline{\sigma}(t_i), \quad (4g)$$

$$\underline{\gamma}(t_i) = \underline{t}_{\varepsilon}(t_i) - \underline{\varepsilon}(t_i), \quad (4h)$$

ahol $\underline{t}_{\sigma}(t_i)$ és $\underline{t}_{\varepsilon}(t_i)$ az $\underline{n}$ normálvektorral definiált síkhoz tartozó feszültség és alakváltozás vektorok, σ és ε rendre a normális irányú feszültség és alakváltozás, τ és γ pedig a síkba eső nyíró feszültség és alakváltozás komponens.

Mind a fáradási paraméter és a hozzá tartozó kritikus sík meghatározásának pontossága ebben a fázisban függ a sík definiálásánál alkalmazott szögosztás lépésközének nagyságától. Mivel a számítási kapacitás és a szögosztás lépésköze között exponenciális az összefüggés [8], így a szögosztást felére csökkentve a számítási igény négyzetesen fog növekedni. Ennek kiküszöbölésére egy optimalizált algoritmus került kidolgozásra, amely első lépésben egy nagyobb lépésközzel közelítő becslést ad a fáradási paraméter eloszlására a szögek függvényében, majd az így számított legnagyobb érték közelében egy finomított keresést végez a pontos érték meghatározására [8]. Ezzel a módszerrel a számítási igény jelentősen

csökkenthető. Az említett kétlépcsős algoritmus esetén a műveleti igény a következő összefüggéssel jellemezhető:

$$OP_0 = (Div1_\theta \cdot Div1_\varphi + Div2_\theta \cdot Div2_\varphi) \cdot m^2. \quad (5)$$

A fenti képletben $Div1_\theta$ és $Div1_\varphi$ a szöglépések száma a közelítő számítás esetén, míg $Div2_\theta$ és $Div2_\varphi$ pedig a szöglépések száma a finomított tartomány vizsgálatakor, m pedig az adatpontok száma egy cikluson belül, ami a tranzien্স számítás során alkalmazott időlépések számával egyezik meg. Ha az (5)-ös összefüggést a szöglépések száma helyett a szöglépés nagyságával fejezzük ki, valamint feltesszük, hogy a második lépésben a legnagyobb érték körüli finomított tartomány mérete megegyezik az első lépésben alkalmazott szöglépés kétszeresével (mivel a maximális érték körül mindkét irányban végrehajtjuk a finomított keresést), és utóbbi esetén a szöglépés l° , akkor az összefüggés a következőképpen módosul:

$$OP = \left(\frac{32400}{StepSize^2} + 4 \cdot StepSize^2 \right) \cdot m^2, \quad (6)$$

ahol a $StepSize$ paraméter jelöli a szöglépés nagyságát. A (6)-os összefüggés esetén kényelmi okokból a szögeket radián helyett fokban helyettesítettük. Ezzel az átírással analitikusan megkereshető a számítási igény szempontjából legoptimálisabb szöglépés nagysága. A (6)-os összefüggést deriválva majd a deriváltat egyenlővé téve 0-val az optimális szöglépés nagysága az első fázisban $9,487^\circ$. Ahhoz, hogy mind az előzetes keresés, mind a finomított fázis esetén egész számú szöglépést lehessen használni, a 10° -os szöglépés javasolt. Ezzel a választással a számítási igény 40-ed részére csökken ahhoz képest, mintha a teljes tartományt egy lépésben 1° -s lépésenként vizsgálnánk át, azonban a kapott eredmények pontossága nem változik. Ezzel az élettartam meghatározásához szükséges fáradási paraméter értékét kellő pontossággal meghatároztuk, a kritikus sík meghatározása azonban további megfontolásokat igényel, amit a következő fejezetben fogunk ismertetni.

3. A KRITIKUS SÍK MEGHATÁROZÁSA

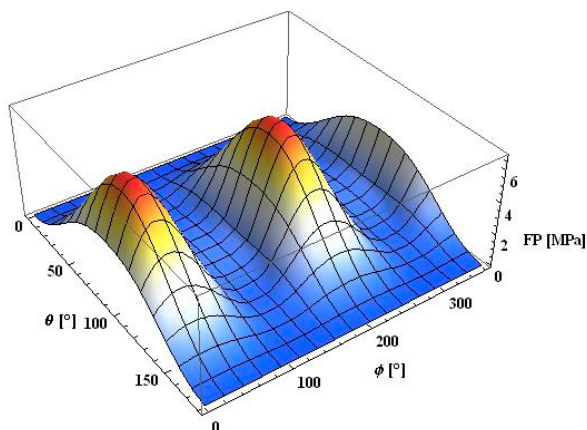
A kritikus sík meghatározása azon a feltevésen alapszik, hogy a tönkremenetet okozó repedés a legnagyobb fáradási paraméterrel jellemzett síkon fog terjedni. A feszültségi és alakváltozási jellemzőket homogén anyagot feltételezve határozzuk meg, azonban a szerkezeti elemek mind tartalmaznak anyaghibákat, szennyező anyagokat és egyéb, a lokális feszültségi és alakváltozási állapotot befolyásoló tényezőket, amelyek feszültségcsúcsokat okoznak, akadályozzák a diszlokációk mozgását, ezzel gátolva a repedés terjedését. Ehhez társul még a főirányok változása is nem arányos terhelés esetén. Ez a hatás jól megfigyelhető a 2. ábrán, ahol egy fárasztóvizsgálat során eltört próbatest látható [9]. A vizsgálat során az EN-GJS-500-14

öntöttvasból készített próbatest terhelése kombinált húzás és csavarás volt arányos terheléssel, és a törés 160 ciklus után következett be. Jól látható, hogy bár a terhelés állandó volt, a repedés a fentebb említett okok miatt többször is irányt váltott a vizsgálat során. Ez alapján helyénvalóbbnak tűnik a



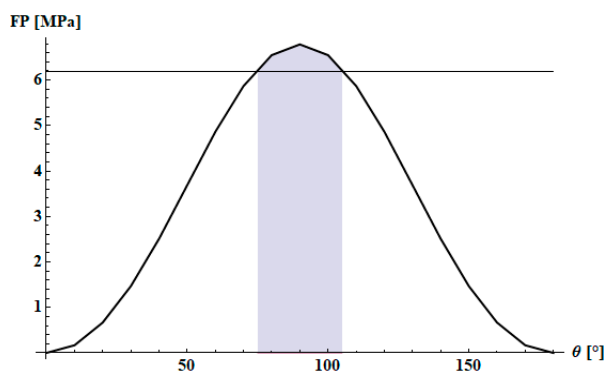
2. ábra. EN-GJS-500-14 próbatest tönkremenetele kombinált húzás-csavarás esetén [9].

repedés síkjára vonatkozóan egy lehetséges szögtartományt kijelölni, amely orientációk között a végső törést okozó repedés terjedni fog. Ez történhet FP maximális értékéhez tartozó sík orientációjától való, %-ban kifejezett eltérés megadásával, vagy az előzetes számítással felvett paraméter térkép segítségével, amikor a lehetséges orientációkat a fáradási paraméter maximális értékétől való eltéréssel definiáljuk. A 2. ábrán bemutatott fárasztóvizsgálathoz tartozó térkép látható a 3. ábrán, amit $J=0,2$ értéket választva kaptunk. Az ábra jól mutatja, hogy FP maximális értéke körül, amit a síkgörbén a piros csúcsok jelentenek, FP értékével arányosan kijelölhető egy szögtartomány, amin belül a repedés az inhomogenitások okozta lokális feszültséggyűjtő helyek miatt kialakulhat, illetve terjedhet. Ebben a példában ezt a tartományt 10%-ban megválasztva azt mondhatjuk, hogy mivel $FP_{max} = 6,8 \text{ MPa}$, így $6,12-6,8 \text{ MPa}$ értékkel rendelkező síkokon várható a repedés terjedése. Az előzetes számítás alapján FP maximális értéke a $\theta = 90^\circ$ és $\varphi = 40^\circ$ -os orientációjú síkon ébred. Az egyes szögek tartományait áttekinthetőbb módon szemléltethetjük, ha az egyik szög állandó értékénél a 3. ábrán látható térgörbéből kimetszünk egy síkot és azt értékéhez tartozó szögek esetén.

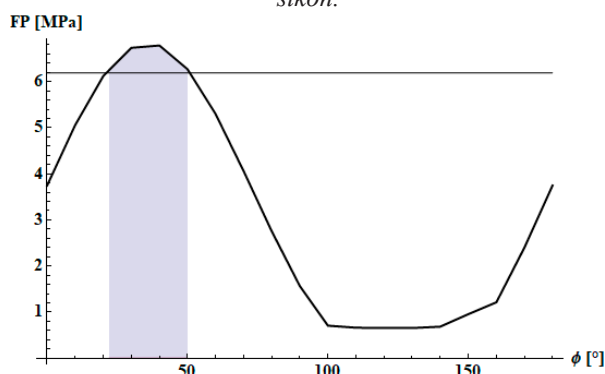


3. ábra. Paraméter térkép.

Az ábrákon jól látszik, hogy FP 10%-os tartománya esetén $\theta \in [75^\circ, 105^\circ]$, míg $\varphi \in [22^\circ, 50^\circ]$. A 2. ábrán látható repedés orientációját a hivatkozott mű szerzői 41° -nak mérték, az ebben a cikkben ismertetett módszerrel FP maximális értéke $\varphi = 35^\circ$ -nál adódott (a θ szög a próbadarab anyagvastagsága mentén definiálva, így itt nem ellenőrizhető). Ha figyelembe vesszük az 5. ábrán kijelölt tartományt, vagyis, hogy a repedés 22° és 50° között várható, akkor megállapíthatjuk, hogy az előrejelzésünk helyes volt és a repedés valóban ebben a tartományban várható.



4. ábra. FP változása θ függvényében a $\varphi = 40^\circ$ -os síkon.



5. ábra. FP változása φ függvényében a $\theta = 90^\circ$ -os síkon.

4. ÖSSZEFOGLALÁS

Ebben a cikkben a kritikus sík meghatározására szolgáló módszer került ismertetésre. A fáradási paraméter meghatározása egy kétlépéses algoritmus segítségével történt, amivel jelentős számítási kapacitás takarítható meg, és felvehető egy paraméter térkép, amely segítségével a repedés várható orientációja meghatározható, figyelembe véve az anyag inhomogenitásait és a főirányok változását egyaránt. Az eredmények ismeretében a következő konklúziók vonhatók le:

- számítási igény szempontjából a legoptimálisabb választás, amennyiben az első fázisban 10° -os szöglépést alkalmazunk.
- Az ebben a cikkben felhasznált mintapélda esetében FP maximális értékétől 10%-os eltérést feltételezve a vizsgálat során keletkezett repedés az előzetesen felvett tartományba esik.

5. IRODALOMJEGYZÉK

Schijve J., *Fatigue of Structures and Materials*. Springer, 2009.

O. P. Modi, N. Deshmukh, D. P. Mondal, A. K. Jha, A. H. Yegneswaran, and H. K. Khaira, "Effect of interlamellar spacing on the mechanical properties of 0.65% C steel," *Mater Charact*, vol. 46, no. 5, pp. 347–352, May 2001.

W. N. Findley, "A Theory for the Effect of Mean Stress on Fatigue of Metals Under Combined Torsion and Axial Load or Bending-asme/terms-of-use," *Journal of Engineering for Industry*, pp. 301–305, 1959.

L. Poczkán, J. Polák, and T. Kruml, "Comparison of critical plane models based on multiaxial low-cycle fatigue tests of 316L steel," *Int J Fatigue*, vol. 171, Jun. 2023.

A. Karolczuk and E. Macha, "A review of critical plane orientations in multiaxial fatigue failure criteria of metallic materials," *Int J Fract*, vol. 134, no. 3–4, pp. 267–304, Aug. 2005.

Y. Jiang and H. Sehitoglu, "A model for rolling contact failure," *Wear*, vol. 224, pp. 38–49, 1999.

J. Barlow, "Optimal stress locations in finite element models," *Int J Numer Methods Eng*, vol. 10, pp. 243–251, 1976.

S. Döbrentei and P. T. Zwierczyk, "An effective algorithm for critical plane calculation," *ECMS 2025, 39th Proceedings*, pp. 184–189, Jun. 2025.

J. Kraft, A. Linn, M. Wächter, A. Esderts, and M. Vormwald, "Multiaxial fatigue behavior and crack orientation prediction for steel and cast iron," *Int J Fatigue*, vol. 183, Jun. 2024.